H Aufgabenlösungen zu Kapitel 8

H.1 Lösung der Übungsaufgabe 8.1

Zur Berechnung des Pfadverlustes beim Zweiwegemodell gehen wir von Bild H.1 aus.

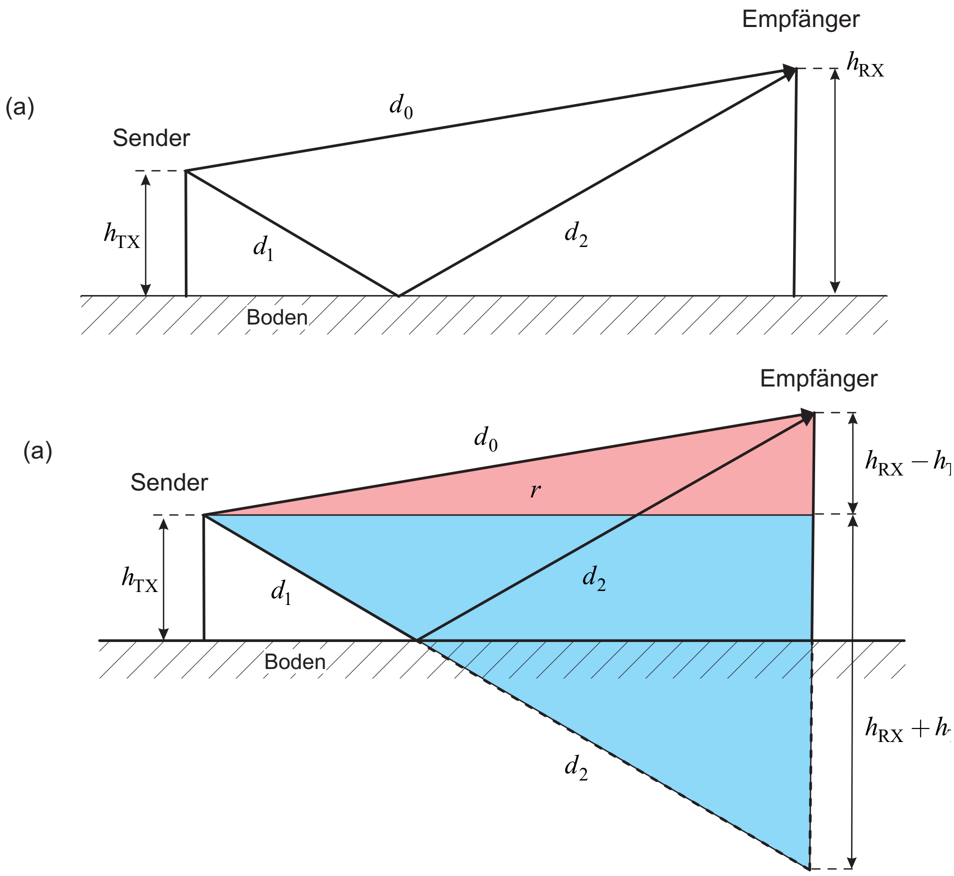

Bild H.1 Zur Berechnung des Pfadverlustes beim Zweiwegemodell

Vom Sender (Senderhöhe $h_S = h_{TX}$) zum Empfänger (Empfängerhöhe $h_E = h_{RX}$) muss die Welle auf dem *direkten Weg* die Strecke d_0 und auf dem indirekten Weg mit Bodenreflexion die Strecke d_1+d_2 zurücklegen. Der horizontale Abstand zwischen Sender und Empfänger betrage r.

Am Ort des Empfängers überlagern sich die elektrischen Feldanteile beider Wege.

$$\vec{E}_{\mathrm{RX}} = \vec{E}_{\mathrm{direkt}} + \vec{E}_{\mathrm{indirekt}} \tag{H.1}$$

In der Praxis (Makrozellen beim Mobilfunk, Richtfunk) sind die Antennenhöhen h_{TX} und h_{RX} klein gegen den Antennenabstand *r*.

$$r \gg h_{\mathrm{TX}}, h_{\mathrm{RX}} \tag{H.2}$$

Wir wollen zunächst den *Betrag* des elektrischen Feldes des direkten Wegen berechnen. Für den Fall $r \gg h_{\mathrm{TX}}, h_{\mathrm{RX}}$ gilt in guter Näherung

$$r \approx d_0 \approx d_1 + d_2 \quad . \tag{H.3}$$

Für einen isotropen Kugelstrahler ist die Strahlungsleitungsdichte *S* dann

$$S = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{E_0^2}{Z_0} \quad . \tag{H.4}$$

Lösen wir dies nach dem elektrischen Feld auf, so erhalten wir:

$$E_0 = \sqrt{\frac{P_{\mathrm{TX}} Z_0}{4\pi r^2}} = \sqrt{\frac{P_{\mathrm{TX}} Z_0}{4\pi}} \cdot \frac{1}{r} \quad . \tag{H.5}$$

Unter Berücksichtigung der *Phase* können wir für den direkten Weg angeben:

$$E_{\mathrm{direkt}} = E_0 e^{-jkd_0} \quad . \tag{H.6}$$

Für den indirekten Weg gilt grundsätzlich der gleiche Betrag, allerdings ist noch ein Reflexionsfaktor r_{Boden} zu berücksichtigen. Für flachen Einfall wird dieser ungefähr $r_{\mathrm{Boden}} = -1$.

$$E_{\mathrm{indirekt}} = (-1) \cdot E_0 e^{-jk(d_1+d_2)}$$

Insgesamt erhalten wir bei der Überlagerung des direkten und indirekten Anteils:

$$E_{\mathrm{RX}} = E_{\mathrm{direkt}} + E_{\mathrm{indirekt}} = E_0 e^{-jkd_0} - E_0 e^{-jk(d_1+d_2)} = E_0 e^{-jkd_0} (1 - e^{-jk(d_1+d_2-d_0)} \quad . \tag{H.7}$$

Ob sich die Feldanteile konstruktiv oder destruktiv überlagern hängt von der Phasendifferenz zwischen den Wellen ab. Die Phasendifferenz ergibt sich aus dem Wegunterschied Δd.

$$\Delta d = (d_1 + d_2) - d_0 \tag{H.8}$$

Die Weglängendifferenz erhalten wir aus geometrischen Überlegungen nach Bild H.1. Für das rote Dreieck gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$r^2 + (h_{\mathrm{RX}} - h_{\mathrm{TX}})^2 = d_0^2 \quad . \tag{H.9}$$

Für das blaue Dreieck gilt entsprechend:

$$r^2 + (h_{\mathrm{RX}} + h_{\mathrm{TX}})^2 = (d_1 + d_2)^2 \quad . \tag{H.10}$$

Wir lösen die Gleichungen nach dem Quotient aus Weglänge und horizontalem Abstand *r* auf und nutzen den aus der Mathematik bekannten Zusammenhang für die Wurzel

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2} \qquad \text{für} \quad x \ll 1 \quad . \tag{H.11}$$

Es gilt also:

$$\frac{d_0}{r}=\sqrt{1+\frac{(h_{\mathrm{RX}}-h_{\mathrm{TX}})^2}{r^2}} \approx 1+\frac{(h_{\mathrm{RX}}-h_{\mathrm{TX}})^2}{2r^2} \tag{H.12}$$

$$\frac{d_1+d_2}{r}=\sqrt{1+\frac{(h_{\mathrm{RX}}+h_{\mathrm{TX}})^2}{r^2}} \approx 1+\frac{(h_{\mathrm{RX}}+h_{\mathrm{TX}})^2}{2r^2} \quad . \tag{H.13}$$

Für die Weglängendifferenz erhalten wir so:

$$d_1+d_2-d_0 \approx r\left[1+\frac{(h_{\mathrm{RX}}+h_{\mathrm{TX}})^2}{2r^2}-1-\frac{(h_{\mathrm{RX}}-h_{\mathrm{TX}})^2}{2r^2}\right]=\frac{2h_{\mathrm{RX}}h_{\mathrm{TX}}}{r} \tag{H.14}$$

Der Betrag der Empfangsfeldstärke wird damit:

$$\left|E_{\mathrm{RX}}\right|=E_0\left|1-e^{-jk(d_1+d_2-d_0)}\right|=E_0\left|1-e^{-jk\frac{2h_{\mathrm{RX}}h_{\mathrm{TX}}}{r}}\right|=\sqrt{\frac{P_{\mathrm{TX}}Z_0}{4\pi}}\cdot\frac{1}{r}\left|1-e^{-jk\frac{2h_{\mathrm{RX}}h_{\mathrm{TX}}}{r}}\right| \quad . \tag{H.15}$$

Ein isotroper Kugelstrahler nimmt aus diesem Feld eine Empfangsleistung auf von

$$P_{\mathrm{RX}}=A_{\mathrm{W}}\cdot S=\frac{\lambda^2}{4\pi}\cdot\frac{E_{\mathrm{RX}}^2}{Z_0}=\frac{\lambda^2}{4\pi}\cdot\frac{P_{\mathrm{TX}}Z_0}{Z_0 4\pi r^2}\left|1-e^{-jk\frac{2h_{\mathrm{RX}}h_{\mathrm{TX}}}{r}}\right|^2 \quad . \tag{H.16}$$

Wir erhalten also für den Pfadverlust:

$$\frac{1}{L}=\frac{P_{\mathrm{RX}}}{P_{\mathrm{TX}}}=\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2\left|1-e^{-jk\frac{2h_{\mathrm{RX}}h_{\mathrm{TX}}}{r}}\right|^2 \quad . \tag{H.17}$$

Mit $k = 2\pi/\lambda_0$ schreiben wir:

$$\frac{1}{L}=\frac{P_{\mathrm{RX}}}{P_{\mathrm{TX}}}=\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2\left|1-e^{-j\frac{4\pi h_{\mathrm{RX}}h_{\mathrm{TX}}}{\lambda_0 r}}\right|^2 \quad . \tag{H.18}$$

Das Betragsquadrat wollen wir noch umschreiben, indem wir einige mathematische Zusammenhänge nutzen. Nach der Eulerschen Formel ist:

$$e^{j\alpha}=\cos\alpha+j\sin\alpha \quad . \tag{H.19}$$

Somit schreiben wir für das Betragsquadrat in Gleichung (H.18):

$$\left|1-e^{j\alpha}\right|^2=\left|\underbrace{1-\cos\alpha}_{\text{Realteil}}-j\underbrace{\sin\alpha}_{\text{Imag.}}\right|^2=(1-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2$$
$$=1-2\cos\alpha+\underbrace{(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2}_{=1}=2(1-\cos\alpha)\quad . \tag{H.20}$$

Aus Formel (H.18) erhalten wir so das Endergebnis:

$$\boxed{\frac{1}{L}=\frac{P_{\text{RX}}}{P_{\text{TX}}}=2\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2\left(1-\cos\left(\frac{4\pi h_{\text{RX}}h_{\text{TX}}}{\lambda_0 r}\right)\right)}\quad . \tag{H.21}$$

H.2 Lösung der Übungsaufgabe 8.2

Ausgangspunkt ist eine Funkverbindung mit

- Betriebsfrequenz f = 400 MHz,
- Antennenhöhe Sender: h_S=h_{TX}=5 m,
- Antennenhöhe Empfänger : h_{E1}=h_{RX1}=5 m,
- Antennenabstand r_1=2 km.

Nach Gleichung (8.10) im Buch ist mit $\lambda_0 = c/f$ = 0,75 m der Pfadverlust:

$$\frac{1}{L_1}=\frac{P_{\text{RX}}}{P_{\text{TX}}}=2\left(\frac{\lambda}{4\pi r_1}\right)^2\left(1-\cos\left(\frac{4\pi h_{\text{RX1}}h_{\text{TX}}}{\lambda_0 r_1}\right)\right)\approx 3{,}892\cdot 10^{-11}\quad . \tag{H.22}$$

Die Näherungsformel für *große Abstände* (Gleichung (8.11) im Buch) liefert:

$$\frac{1}{L_1}=\frac{h_{\text{TX}}^2 h_{\text{RX1}}^2}{r_1^4}=3{,}90625\cdot 10^{-11}\rightarrow L_1=2{,}56\cdot 10^{10}=10\lg\left(2{,}56\cdot 10^{10}\right)=104{,}08\text{ dB}\quad . \tag{H.23}$$

Wir können also vereinfachend mit der Näherungsformel rechnen.

Der Antennenabstand wird nun auf r_2 = 3 km erhöht. Durch Anpassung der Empfängerantennenhöhe soll gewährleistet werden, dass der Pfadverlust gleich bleibt. Es muss also gelten:

$$\frac{1}{L_1}=\frac{h_{\text{TX}}^2 h_{\text{RX1}}^2}{r_1^4}=\frac{1}{L_2}=\frac{h_{\text{TX}}^2 h_{\text{RX2}}^2}{r_2^4}\quad . \tag{H.24}$$

Daraus folgt für die neue Antennenhöhe des Empfängers

$$h_{\text{RX2}}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 h_{\text{RX1}}=11{,}25\text{ m}\quad . \tag{H.25}$$

H.3 Lösung der Übungsaufgabe 8.3

Es gelten folgende Werte:

- Abstand $r = 36000$ km,
- Frequenz $f = 10$ GHz
- Gewinn Bodenstation $G_B = 30$ dBi,
- Gewinn Satellit $G_S = 30$ dBi.

Nach Gleichung (8.7) im Buch gilt für die isotrope Funkfelddämpfung

$$L_{F0} = 20 \lg\left(\frac{4\pi r f}{c_0}\right) = 203{,}57\,\mathrm{dB} \quad . \tag{H.26}$$

Die Empfangsleistung berechnen wir mit Gleichung (8.6) im Buch

$$\frac{P_{RX}}{\mathrm{dBm}} = \frac{P_{TX}}{\mathrm{dBm}} + \frac{G_S}{\mathrm{dB}} + \frac{G_B}{\mathrm{dB}} - \frac{L_{F0}}{\mathrm{dB}} \tag{H.27}$$

und erhalten

$$P_{RX} = \underbrace{30\,\mathrm{dBm}}_{1\mathrm{W}} + 30\,\mathrm{dBi} + 20\,\mathrm{dBi} - 203{,}56\,\mathrm{dB} = -123{,}53\,\mathrm{dBm} = 4{,}436 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{W} \quad . \tag{H.28}$$

–

(Stand: 01.08.2012)